一般化された分割の重みを備えた統一的無限乗積の枠組み

プログラミングと仕事論

2026 年 5 月

概要

本論文では, 大きさ k の和因子が重複度 l で選ばれたときに特定の重みを割り当てる 2 変数の重み関数 $f(k,l)$ によってパラメータ化された, 整数の分割への一般化されたアプローチである「統一的無限乗積（Unified Infinite Product）」の枠組みを導入する. 分割の生成関数を形式的べき級数として扱うことにより, 本枠組みがオイラーの分割恒等式から第二種スターリング数の自然な導出に至るまでの古典的な組み合わせ論的結果を一元的に統一することを示す. さらに, 異なる局所的な重みの与え方が同一の大域的生成関数をもたらす「関数の退化（functional degeneracy）」という現象を明らかにする. この対称性を解明するために, コーシー積の下での正規化された重み関数の空間が, 主単元群の無限直積に同型であること（$\mathcal{F} \cong G^{\mathbb{N}}$）を証明し, 厳密な代数的基盤を確立する. この代数的視点は, 群準同型の核を通じてこの退化を完全に特徴付けるとともに, 複雑な無限乗積が初等的な多項式へとエレガントに帰着する「完全平坦化（perfect flattening）」のメカニズムを明らかにする.

目次

1 序論

レオンハルト・オイラーによって創始された整数分割の理論は, 組合せ論および数論の双方において重要な礎となっている. 制約のない分割（通常の分割）に対するオイラーの古典的な生成関数は, 整数の和を数え上げる問題を無限乗積の解析へと変換することで, 整数の加法的性質と乗法的な代数構造を美しく橋渡ししている. 何世紀にもわたり, 相異なる和因子, 奇数の和因子, あるいは色付き分割といった, 分割に対する様々な制約や重み付けが広く研究され, 深遠な恒等式が数多く導き出されてきた.

しかしながら, こうした派生形は伝統的に, 独立した個別のケースや特定の生成関数として扱われてきた. 本論文では, 大きさ k の和因子がちょうど l 回用いられた際に割り当てる重みを決定する 2 変数の重み関数

$f(k,l)$ を導入することで, これらを一般化するアプローチを提案する. この局所的なルールを用いて, 統一的無限乗積 $\Phi(f,q)$ を次のように定義する：

$$\Phi(f,q) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty} f(k,l)q^{kl}\right).$$

この枠組みは, 分割の理論に新たな視座をもたらすものである. 重み関数 $f(k,l)$ を調整することで, $\Phi(f,q)$ がオイラーの分割恒等式から対称群に関するコーシーの公式に至るまで, 様々な古典的対象を一元的に統一することを示す. さらに, この代数系が整数分割と集合分割の間の架け橋となり, 階乗を含む重みを導入することで第二種スターリング数が自然に導出されることを明らかにする.

最後に, 異なる局所的なルール $f(k,l)$ が全く同じ大域的生成関数をもたらす「関数の退化（functional degeneracy)」という現象について考察し, 統一的無限乗積が $\frac{1}{1-q}$ や $1-q$ のような初等的な形式へと美しく帰着する「完全平坦化（perfect flattening)」という驚くべき現象を提示する.

2　統一的無限乗積の枠組み

2.1　定義と基本例

本枠組みを構築するため, 和因子が選択されない場合（重複度がゼロの場合）をも包含する, 一般化された重み関数を導入する.

定義 2.1 (重み関数の空間と局所的なルール)**.** $\mathcal{F}$ を, 次の正規化条件

$$f(k,0) = 1 \quad \text{for all } k \geq 1$$

を満たす全ての関数 $f : \mathbb{Z}_{\geq 1} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ からなる集合とする. $\mathcal{F}$ の任意の元 f を正規化された重み関数と呼ぶ. 特に, 固定された和因子の大きさ k に対し, 対応付け $l \mapsto f(k,l)$ を和因子 k に対する局所的なルールと呼ぶ.

条件 $f(k,0) = 1$ は, 和因子を 0 回選択することが乗法的な重み 1 を寄与することを本質的に保証しており, これは組合せ論的な空集合と完全に整合する. この用語法の下で, 正規化された重み関数 $f \in \mathcal{F}$ は, すべての整数 $k \geq 1$ にわたる局所的なルールの集まりとみなすことができ, これらが総体として生成関数の大域的な挙動を決定する.

定義 2.2 (統一的無限乗積)**.** 任意の $f \in \mathcal{F}$ に対し, 統一的無限乗積 $\Phi(f,q)$ を, 次式で与えられる $\mathbb{R}[[q]]$ における形式的べき級数として定義する.

$$\Phi(f,q) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} f(k,m)q^{km}\right).$$

例 2.1. すべての $k \geq 1$ および $l \geq 0$ に対して $f_1(k,l) = 1$ とする．このとき,

$$\begin{aligned}\Phi(f_1, q) &= \prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty} q^{kl}\right)\\ &= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^k}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n,\end{aligned}$$

ここで $p(n)$ は分割数である．

定理 2.3 (オイラーの分割恒等式)**.** 任意の非負整数 n に対して, 相異なる和因子からなる n の分割の総数は, 奇数の和因子からなる n の分割の総数に等しい．
生成関数の観点からは, これは次のように表される．

$$(1+q^1)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\cdots = \frac{1}{1-q^1}\cdot\frac{1}{1-q^3}\cdot\frac{1}{1-q^5}\cdot\frac{1}{1-q^7}\cdots.$$

証明. 次の計算を行えばよい．

$$\begin{aligned}(1+q^1)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\cdots &= \frac{1-q^2}{1-q^1}\cdot\frac{1-q^4}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^6}{1-q^3}\cdot\frac{1-q^8}{1-q^4}\cdots\\ &= \frac{\cancel{1-q^2}}{1-q^1}\cdot\frac{\cancel{1-q^4}}{\cancel{1-q^2}}\cdot\frac{\cancel{1-q^6}}{1-q^3}\cdot\frac{\cancel{1-q^8}}{\cancel{1-q^4}}\cdots\\ &= \frac{1}{1-q^1}\cdot\frac{1}{1-q^3}\cdot\frac{1}{1-q^5}\cdot\frac{1}{1-q^7}\cdots.\end{aligned}$$

□

例 2.2. すべての $k \geq 1, l \geq 0$ に対して $f_{\mathrm{sgn}}(k,l) = (-1)^{(k-1)l}$ とする．このとき,

$$\begin{aligned}\Phi(f_{\mathrm{sgn}}, q) &= \prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{(k-1)l}q^{kl}\right)\\ &= \prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\left((-1)^{k-1}q^k\right)^l\right)\\ &= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-(-1)^{k-1}q^k}\\ &= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+(-1)^k q^k}\\ &= (*).\end{aligned}$$

定理 2.3 より, 次が従う．

$$(*) = (1+q^1)(1+q^3)(1+q^5)(1+q^7)\cdots.$$

したがって, 次が成り立つ．

$$\Phi(f_{\mathrm{sgn}}, q) = (1+q^1)(1+q^3)(1+q^5)(1+q^7)\cdots.$$

例 2.3. すべての $k \geq 1, l \geq 0$ に対して, $f_2(k,l) = \frac{1}{l! \cdot k^l}$ とおく. このとき,

$$\begin{aligned}
\Phi(f_2, q) &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{q^{kl}}{l! \cdot k^l} \right) \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{q^k}{k} \right)^l \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left(\frac{q^k}{k} \right) \\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} \right) \\
&= \exp(-\log(1-q)) \\
&= \frac{1}{1-q}.
\end{aligned}$$

例 2.4. $f_3 \in \mathcal{F}$ を次のように定義する.

$$f_3(k,l) = \begin{cases} 1 & k=1 \text{ または } l=0 \text{ のとき}, \\ 0 & \text{それ以外}. \end{cases}$$

このとき,

$$\begin{aligned}
\Phi(f_3, q) &= (1 + q^1 + q^2 + q^3 + \cdots) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cdots \\
&= 1 + q^1 + q^2 + q^3 + \cdots \\
&= \frac{1}{1-q} \\
&= \Phi(f_2, q).
\end{aligned}$$

2.2 係数の組合せ論的解釈

ここでは, 統一的無限乗積の係数に対する明快な組合せ論的解釈を与える. $\Phi(f,q)$ を形式的べき級数として展開することにより, それが重み付き整数分割の生成関数として機能することが分かる.

λ を非負整数 n の分割とし, 記号では $\lambda \vdash n$ と書く. λ を次のような標準的な重複度による表記で表す：

$$\lambda = (1^{m_1(\lambda)} 2^{m_2(\lambda)} 3^{m_3(\lambda)} \cdots),$$

ここで $m_j(\lambda) \geq 0$ は λ における和因子 j の重複度を表す. 各分割 $\lambda \vdash n$ および与えられた重み関数 f に対し, その一般化された重み $g(f, \lambda)$ を, それを構成する和因子全体にわたる有限乗積として次のように定義する：

$$g(f, \lambda) = \prod_{m_j(\lambda) > 0} f(j, m_j(\lambda)).$$

この準備の下で, 本枠組みの主要な組合せ論的定理は次のように述べられる.

定理 2.4 ($\Phi(f,q)$ の組合せ論的展開)**.** 統一的無限乗積 $\Phi(f,q)$ は, 総分割重み $A(f,n)$ の生成関数である. すなわち,

$$\Phi(f,q) = \sum_{n=0}^{\infty} A(f,n) q^n,$$

ここで $A(f,0)=1$ であり, $n \geq 1$ に対して係数 $A(f,n)$ は次式で与えられる.

$$A(f,n) = \sum_{\lambda \vdash n} g(f,\lambda).$$

証明. 次の無限乗積の展開を考える.

$$\Phi(f,q) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(f(k,0) + f(k,1)q^k + f(k,2)q^{2k} + f(k,3)q^{3k} + \cdots \right).$$

すべての $k \geq 1$ に対して $f(k,0)=1$ であるから, これは次のようになる.

$$\Phi(f,q) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + f(k,1)q^k + f(k,2)q^{2k} + f(k,3)q^{3k} + \cdots \right).$$

この乗積を展開したときの一般項は, 各因子から単項式をちょうど 1 つずつ選択することによって形成される. 項 $f(k, m_k(\lambda)) q^{m_k(\lambda) \cdot k}$ を選択することは, 得られる分割 $\lambda \vdash n$ において, 大きさ k の和因子を重複度 $m_k(\lambda)$ で選択することに対応する. 指数の総和が n となるようなすべての可能な組合せにわたって和をとることで, 求める結果 $A(f,n) = \sum_{\lambda \vdash n} \prod_{m_j(\lambda)>0} f(j, m_j(\lambda))$ が直ちに得られる. □

例 2.5 ($A(f,4)$ の計算)**.** 定理 2.4 の組合せ論的なメカニズムを明確にするため, 係数 $A(f,4)$ を具体的に計算してみよう. $n=4$ の整数分割はちょうど 5 つ存在し, それらは $\lambda_1 = (4)$, $\lambda_2 = (3,1)$, $\lambda_3 = (2,2)$, $\lambda_4 = (2,1,1)$, および $\lambda_5 = (1,1,1,1)$ で与えられる.

重複度を用いた表記 $\lambda = (1^{m_1(\lambda)} 2^{m_2(\lambda)} 3^{m_3(\lambda)} 4^{m_4(\lambda)} \cdots)$ を使用すると, それぞれの重複度および一般化された重み $g(f,\lambda)$ は次のように決定される.

- $\lambda_1 = (4)$ のとき: $m_4(\lambda_1) = 1$. したがって, $g(f,\lambda_1) = f(4,1)$.
- $\lambda_2 = (3,1)$ のとき: $m_1(\lambda_2) = 1$ かつ $m_3(\lambda_2) = 1$. したがって, $g(f,\lambda_2) = f(1,1)f(3,1)$.
- $\lambda_3 = (2,2)$ のとき: $m_2(\lambda_3) = 2$. したがって, $g(f,\lambda_3) = f(2,2)$.
- $\lambda_4 = (2,1,1)$ のとき: $m_1(\lambda_4) = 2$ かつ $m_2(\lambda_4) = 1$. したがって, $g(f,\lambda_4) = f(1,2)f(2,1)$.
- $\lambda_5 = (1,1,1,1)$ のとき: $m_1(\lambda_5) = 4$. したがって, $g(f,\lambda_5) = f(1,4)$.

すべての分割 $\lambda \vdash 4$ にわたって和をとることで, $A(f,4)$ の具体的な代数式が得られる.

$$A(f,4) = f(4,1) + f(1,1)f(3,1) + f(2,2) + f(1,2)f(2,1) + f(1,4).$$

これは, $\Phi(f,q)$ の各因子を直接展開することによって得られる q^4 の係数と完全に一致する.

例 2.6 (f_{sgn} の代数的背景と組合せ論的三面性)**.** 一般化された重み $g(f,\lambda)$ の定義が確立されたので, 例 2.2 で導入した重み関数 f_{sgn} の群論的な起源と深い組合せ論的含意を完全に明らかにすることができる.

対称群 S_n の表現論において, 置換 $\sigma \in S_n$ の符号 (パリティ) は完全にそのサイクルタイプに依存する: 長さ k の各巡回置換は因子 $(-1)^{k-1}$ に寄与する. したがって, σ の共役類が分割 $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \cdots) \vdash n$ に対応

する場合, 置換全体の符号は古典的な乗積 $\prod_{j\geq 1}(-1)^{(j-1)m_j}$ によって与えられる. これを我々の枠組みと比較すると, f_{sgn} の下での一般化された重みがこの構造を完全に反映していることが直ちに従う:

$$g(f_{\mathrm{sgn}}, \lambda) = \prod_{m_j(\lambda)>0} (-1)^{(j-1)m_j(\lambda)} = \mathrm{sgn}(\sigma).$$

したがって, $g(f_{\mathrm{sgn}}, \lambda)$ は対応する置換の符号と同一であり, 表記 $g(f_{\mathrm{sgn}}, \lambda) = \mathrm{sgn}(\lambda)$ を正当化する.

この代数的特徴付けと例 2.2 の結果を組み合わせることで, 驚くべき組合せ論的な恒等式が得られる. $\Phi(f_{\mathrm{sgn}}, q) = \prod_{m=1}^{\infty}(1 + q^{2m-1})$ を確立したことを思い起こそう. 定理 2.4 によれば, 大域的係数 $A(f_{\mathrm{sgn}}, n) = \sum_{\lambda\vdash n} \mathrm{sgn}(\lambda) \in \mathbb{R}$ は, n のすべての分割にわたる符号の和となっている. 一方で, 展開された乗積 $\prod_{m=1}^{\infty}(1 + q^{2m-1})$ は, まさに n の相異なる奇数の和因子からなる分割の総数の生成関数である.

さらに, シルベスター（Sylvester）の古典的な全単射組合せ論により, 相異なる奇数の和因子からなる n の分割の数は, n の自己共役な分割（ヤング図形が主対角線に関して対称である分割）の数と厳密な全単射の関係にある. その結果, 我々の枠組みは, 一見すると無関係に思えるこれらの概念を単一の等式の鎖へとエレガントに統一する:

$$A(f_{\mathrm{sgn}}, n) = \sum_{\lambda\vdash n} \mathrm{sgn}(\lambda) = q_{\text{dist, odd}}(n) = p_{\text{self-conj}}(n),$$

ここで, $q_{\text{dist, odd}}(n)$ は相異なる奇数の和因子からなる n の分割の数を表し, $p_{\text{self-conj}}(n)$ は n の自己共役な分割の数を表す. これは, 符号の重みという単純な局所的選択が, ヤング図形における大域的な幾何学的対称性の出現を自然に強制することを明らかにしている.

2.3 代数構造と群同型

重複度の定義域にゼロを含めることにより, 空間 $\mathcal{F}$ はコーシー積を通じて形式的べき級数の代数構造を自然に継承する.

定義 2.5 (重み関数の畳み込み)**.** 任意の 2 つの重み関数 $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ に対し, それらの畳み込み $f_1 * f_2$ を, 各 $k \geq 1$ および $m \geq 0$ に対して次式で定義する.

$$(f_1 * f_2)(k, m) = \sum_{l=0}^{m} f_1(k, l) f_2(k, m - l).$$

定理 2.6 (重みのアーベル群)**.** 組 $(\mathcal{F}, *)$ はアーベル群をなす.

証明. $(\mathcal{F}, *)$ に対する群の公理を検証する.

- **演算について閉じていること:** $m = 0$ に対して, $(f_1 * f_2)(k, 0) = f_1(k, 0)f_2(k, 0) = 1 \cdot 1 = 1$ となる. したがって, $f_1 * f_2$ は適切に正規化されたままであり, $\mathcal{F}$ に属する.
- **単位元:** 単位元 $\mathbf{e} \in \mathcal{F}$ は, $\mathbf{e}(k, 0) = 1$, およびすべての $m \geq 1$ に対して $\mathbf{e}(k, m) = 0$ によって定義される. これは自明に $f * \mathbf{e} = f$ を満たす.
- **逆元:** 各 $f \in \mathcal{F}$ に対し, その一意的な逆元 $f^{-1} \in \mathcal{F}$ は帰納的に構成することができる. $f^{-1}(k, 0) = 1$

とおき, $m \geq 1$ に対して次のように定める.

$$f^{-1}(k,m) = -\sum_{l=1}^{m} f(k,l) f^{-1}(k,m-l).$$

- **結合法則および交換法則:** これらの性質は, 形式的べき級数のコーシー積の性質から直ちに従う.

□

空間 $\mathcal{F}$ の根底にある対称性をさらに明快にするため, 定数項が 1 であるすべての形式的べき級数の集合を $G = \{\phi \in \mathbb{R}[[q]] \mid \phi(0) = 1\}$ と定義する. コーシー積の下で, G はアーベル群（主単元群）をなす. ここで, 我々の枠組みの核心となる代数的な本質を提示する.

定理 2.7 (無限直積への同型)**.** $G^{\mathbb{N}}$ を, 和因子 $k \in \mathbb{N}$ を添字とし, 成分ごとの乗法を備えた群 G の無限直積とする. このとき, 正規化された重み関数の空間 $(\mathcal{F}, *)$ は $G^{\mathbb{N}}$ と同型である.

証明. 任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して定義される明示的な写像 $\Psi : \mathcal{F} \to G^{\mathbb{N}}$ を次のように構成する.

$$\Psi(f) = (\phi_1(q), \phi_2(q), \phi_3(q), \dots),$$

ここで, 各成分の級数 $\phi_k(q) \in G$ は次で与えられる.

$$\phi_k(q) = \sum_{m=0}^{\infty} f(k,m) q^m.$$

すべての $k \geq 1$ に対して $f(k,0) = 1$ であるため, 各 $\phi_k(q)$ は自然に定数項 1 を持ち, $\phi_k(q) \in G$ が保証される. したがって, この写像は well-defined である.

全単射性を証明するために, $\phi_k(q) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{k,m} q^m$（ただし $a_{k,0} = 1$）となる級数の任意の列 $(\phi_1(q), \phi_2(q), \dots) \in G^{\mathbb{N}}$ をとる. $f(k,m) = a_{k,m}$ とおくことで, 関数 $f \in \mathcal{F}$ を一意に復元することができる. $f(k,0) = a_{k,0} = 1$ であるから, この関数は $\mathcal{F}$ に属し, Ψ が全単射であることが示される.

Ψ が群準同型であることを示すために, $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ をとる. 固定された添字 $k \geq 1$ について, $\Psi(f_1 * f_2)$ の第 k 成分は次のように展開される.

$$\sum_{m=0}^{\infty} (f_1 * f_2)(k,m) q^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{m} f_1(k,l) f_2(k,m-l) \right) q^m.$$

この式はまさに, 2 つの級数 $\sum_{l=0}^{\infty} f_1(k,l) q^l$ と $\sum_{j=0}^{\infty} f_2(k,j) q^j$ の通常のコーシー積である. 直積 $G^{\mathbb{N}}$ における群演算は成分ごとに定義されているため, $\Psi(f_1 * f_2) = \Psi(f_1) * \Psi(f_2)$ が成り立つ. したがって, Ψ は群同型写像を構成し, $(\mathcal{F}, *) \cong G^{\mathbb{N}}$ である. □

定数項が 1 である形式的べき級数の乗法群を $\mathbb{R}[[q]]^{\times}$ と表す.

定理 2.8 (群準同型)**.** 対応 $f \mapsto \Phi(f,q)$ は, $(\mathcal{F}, *)$ から $(\mathbb{R}[[q]]^{\times}, \cdot)$ への群準同型写像である. すなわち,

$$\Phi(f_1 * f_2, q) = \Phi(f_1, q) \cdot \Phi(f_2, q).$$

証明. 各 $k \geq 1$ について, 無限乗積を因子ごとに展開することにより, 次がわかる.

$$\begin{aligned}\Phi(f_1, q) \cdot \Phi(f_2, q) &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} f_1(k,l) q^{kl} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} f_2(k,j) q^{kj} \right) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{m} f_1(k,l) f_2(k, m-l) \right) q^{km} \right) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} (f_1 * f_2)(k,m) q^{km} \right) = \Phi(f_1 * f_2, q).\end{aligned}$$

これで証明が完了した. □

例 2.7 (代数的メカニズムに関する注意)**.** 定理 2.7 で示された同型写像 Ψ を用いると, 統一的無限乗積 $\Phi(f,q)$ は, 各成分 $\phi_k(q) \in G$ に変数のスケール変換 $(q \mapsto q^k)$ を施し, 続いてすべての $k \geq 1$ にわたって総乗をとる操作として解釈できる.

$$\Phi(f,q) = \prod_{k=1}^{\infty} \phi_k(q^k).$$

この代数的な視点から見ると, 準同型の性質 $\Phi(f_1 * f_2, q) = \Phi(f_1, q) \cdot \Phi(f_2, q)$ は, 直積群 $G^{\mathbb{N}}$ から引き継がれた成分ごとの乗法から直ちに従う.

3 関数の縮退と組合せ論的応用

3.1 関数の縮退と核

$\Theta(f) = \Phi(f,q)$ によって定義される写像 $\Theta : \mathcal{F} \to \mathbb{R}[[q]]^{\times}$ は群準同型であるが, 本質的に非単射である. この非単射性は, 異なる局所的な重み関数 $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ が同一の大域的な生成関数へと潰れてしまうという, 我々が関数の縮退と定義する現象を引き起こす.

代数的な観点から見ると, このシステムレベルの縮退は, 準同型写像 Θ の核によって包括的に特徴付けることができる.

定義 3.1 (縮退の核)**.** 統一的無限乗積への写像の核は $\ker \Theta$ と表され, べき級数の乗法群の単位元へと写される, すべての正規化された重み関数の集合として次のように定義される.

$$\ker \Theta = \{ f \in \mathcal{F} \mid \Theta(f) = 1 \}.$$

したがって, 2 つの重み関数 f_1 と f_2 が全く同じ統一的無限乗積を与えるための必要十分条件は, それらが $\ker \Theta$ の同じ剰余類に属すること, すなわち $f_1 * f_2^{-1} \in \ker \Theta$ となることである. この現象の極端な例が「完全平坦化 (perfect flattening)」であり, ここでは無限乗積が見事に単純な多項式へと帰着する.

定理 3.2 (逆重みによる完全平坦化)**.** $f_{\text{flat}} \in \mathcal{F}$ を次のように定義される重み関数とする.

$$f_{\text{flat}}(k,m) = \frac{(-1)^m}{m! \cdot k^m} \quad (\text{任意の } k \geq 1, m \geq 0 \text{ に対して})$$

このとき, 大域的な生成関数は 1 次多項式へと完全に潰れる.

$$\Phi(f_{\text{flat}}, q) = 1 - q.$$

証明. 同型写像 Ψ の下での成分級数の構造を利用することで, f_{flat} の第 k 成分は次のようになる.

$$\phi_k(q) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot k^m} q^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{q}{k}\right)^m = \exp\left(-\frac{q}{k}\right).$$

これらの成分を, 変数のスケール変換 $q \mapsto q^k$ を伴う大域的な乗積の枠組みに代入すると, 次が得られる.

$$\begin{aligned}\Phi(f_{\text{flat}}, q) &= \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{q^k}{k}\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k}\right).\end{aligned}$$

形式的対数に対する標準的なメルカトル級数展開 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} = -\log(1-q)$ を用いると, この式は直ちに次のように簡約される.

$$\Phi(f_{\text{flat}}, q) = \exp\left(\log(1-q)\right) = 1 - q.$$

これにより, f_{flat} が無限乗積の系を $1-q$ へと平坦化することが証明された. 準同型の性質 $\Phi(f^{-1}) = \Phi(f)^{-1}$ を考慮すると, この f_{flat} は例 2.3 で導入された $\frac{1}{1-q}$ を生成する重み関数 f_2 の, 群 $(\mathcal{F}, *)$ における逆元 f_2^{-1} に他ならない. これは, 本稿で導入した代数的構造の妥当性を明確に裏付ける結果である. □

3.2 整数分割と集合分割の橋渡し: スターリング数

整数分割が数をラベルを持たない和因子へと分割するのに対し, 集合分割は要素を区別可能なグループへと割り当てる. 2 重添字の重み関数に階乗の項を巧妙に組み込むことで, 我々の枠組みは整数分割と集合分割の間の構造的な隔たりを自然に橋渡しし, 第 2 種スターリング数を導出する.

定理 3.3 (第 2 種スターリング数の出現)**.** $x \in \mathbb{R}$ をパラメータとする．重み関数 $f_{\mathrm{set}} \in \mathcal{F}$ を次のように定義する．

$$f_{\mathrm{set}}(k,l) = \frac{x^l}{l! \cdot (k!)^l} \quad (\text{任意の } k \geq 1, l \geq 0 \text{ に対して})$$

このとき, 統一的無限乗積の大域的な係数 $A(f_{\mathrm{set}}, n)$ は, 第 2 種スターリング数によって生成される多項式に一致する．

$$A(f_{\mathrm{set}}, n) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \left\{ {n \atop j} \right\} x^j,$$

ここで, $\left\{ {n \atop j} \right\}$ は第 2 種スターリング数を表す．

証明. まず, f_{set} に付随する成分の形式的べき級数 $\phi_k(q)$ を計算する．

$$\phi_k(q) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l! \cdot (k!)^l} q^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{x \cdot q}{k!} \right)^l = \exp\left(\frac{x \cdot q}{k!} \right).$$

次に, スケール変換 $q \mapsto q^k$ を用いてこれらの成分を統一無限乗積へと組み込むと, 次が得られる．

$$\begin{aligned} \Phi(f_{\mathrm{set}}, q) &= \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left(\frac{x \cdot q^k}{k!} \right) \\ &= \exp\left(x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k!} \right) \\ &= \exp\left(x \left(e^q - 1 \right) \right). \end{aligned}$$

級数 $\exp(x(e^q - 1))$ は, 第 2 種スターリング数の指数型生成関数としてよく知られている．これを形式的べき級数として展開すると, 次のようになる．

$$\exp\left(x \left(e^q - 1 \right) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \left\{ {n \atop j} \right\} x^j \right) \frac{q^n}{n!}.$$

定理 2.4 によれば, $\Phi(f_{\mathrm{set}}, q) = \sum_{n=0}^{\infty} A(f_{\mathrm{set}}, n) q^n$ である．両方の表現における q^n の係数を比較することにより, 次の結論を得る．

$$A(f_{\mathrm{set}}, n) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \left\{ {n \atop j} \right\} x^j.$$

これで証明が完了し, 本枠組みが整数分割の局所的な規則を通じて集合分割の構造を難なく統合できることが確認された． □

注意 3.1 (ベル多項式に対する演算子法的な視点)．$B_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \left\{ {n \atop j} \right\} x^j$ をベル多項式とする代数的な関係式 $\exp(x(e^q - 1)) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{q^n}{n!}$ は, 通常, 組合せ論的な全単射や形式的べき級数の展開を通じて導出される．あるいは, 微分作用素の非可換な枠組みを用いることで, この恒等式を自然に導き出すことも可能である．

$D_x = \frac{d}{dx}$ および $\theta_x = x D_x$ を, それぞれ x に関する標準的な微分作用素およびオイラー作用素とする．シフト恒等式 $1 + D_x = e^{-x} D_x e^x$ を利用すると, 作用素 $x(1 + D_x)$ の n 乗は, 相似変換によって次のように書

き直すことができる.

$$\{x(1+D_x)\}^n = e^{-x}\theta_x^n e^x.$$

この作用素を定数関数 1 に作用させるとベル多項式が得られる. すなわち, $\{x(1+D_x)\}^n \cdot 1 = B_n(x)$ である. これらの作用素の指数型生成関数を考えることで, 組合せ論的な議論に頼ることなく, この恒等式を見事に導出することができる.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{q^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\{x(1+D_x)\}^n \cdot 1 \cdot \frac{q^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x}\theta_x^n e^x \cdot 1 \cdot \frac{q^n}{n!} \\
&= e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\theta_x^n\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\frac{q^n}{n!} \\
&= e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta_x^n x^k}{k!}\cdot\frac{q^n}{n!} \\
&= e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n x^k}{k!}\cdot\frac{q^n}{n!} \quad (\theta_x^n x^k = k^n x^k \text{ より}) \\
&= e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kq)^n}{n!} \\
&= e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\cdot e^{kq} \\
&= e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(xe^q)^k}{k!} \\
&= \exp(-x)\cdot\exp(xe^q) \\
&= \exp(x(e^q-1)).
\end{aligned}$$

この演算子法的な視点は, 我々の統一的な枠組みにおける大域的な係数展開に対し, 深遠な代数的な骨組みを提供するものである.